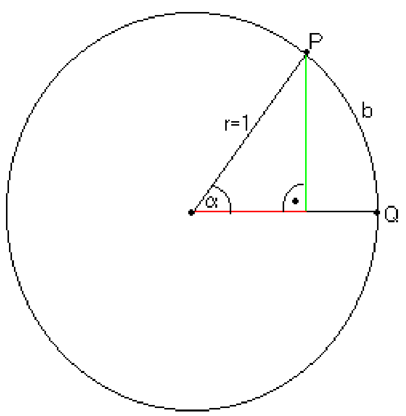
5.2.3. Trigonometrische Funktionen

Hinter diesem Ungetüm an Namen verbergen sich die Funktionen von Sinus, Kosinus und Tangens. Diese Begriffe haben wir schon im Zusammenhang mit rechtwinkeligen Dreiecken kennen gelernt. In diesem Kapitel geht es nun darum, wie sieht z.B. eine Sinusfunktion der Art $y = \sin(x)$ aus. Bevor wir uns nun die Funktionsgraphen genau ansehen, beginnen wir mit den Eigenschaften von Sinus- und Kosinusfunktion:

- Beide Funktionen stellen Schwingungen dar. Eine Schwingung wird z.B. durch ein Pendel beschrieben. Die Funktionen stellen die Pendelbewegung allerdings nicht von links nach rechts, sondern von oben nach unten dar.
- Die Funktionen $y = \sin(x)$ und $y = \cos(x)$ pendeln zwischen der 1 und der -1 hin und her
- Beide Funktionen sind periodische Funktionen, d.h. sie kommen von minus unendlich (links) und gehen ins Plus unendliche (nach rechts) und beschreiben auf diesem Weg eine immer wiederkehrende (periodische) Schwingungsbewegung.

Bevor wir jetzt wirklich uns einige Funktionsgraphen ansehen, muss ich noch auf die unterschiedliche Beschriftung der x-Achse eingehen. Die x-Achse ist entweder in Gradzahl (DEG) oder in normalen Zahlen, genauer vielfache von der Kreiszahl Pi = 3,14…, (RAD) beschriftet. Um das zu verstehen, muss man wissen, was der Sinus und Kosinus im Zusammenhang mit dem Einheitskreis bedeutet. Ein Einheitskreis ist ein Kreis, dessen Radius r eine Einheit (Abstand von einer Einheit zur nächsten auf der x-Achse) beträgt. In diesen Einheitskreis kann man ein rechtwinkeliges Dreieck folgendermaßen einzeichnen.



Das Aussehen des rechtwinkeligen Dreieckes ist entweder durch den Winkel α oder durch die Länge des Kreisbogens b bestimmt. Die Größe des Winkels bzw. die Länge des Kreisbogens b hängt von der Lage des Punktes P ab. Die grüne Linie stellt die vertikale (senkrechte) Auslenkung dar, während die rote Linie die horizontale (waagrechte) Auslenkung darstellt. Die Länge der grünen bzw. roten Linie hängt ebenfalls von der Lage des Punktes P ab. Überlege, wie sich das Dreieck verändert, wenn der Punkt P sich auf der Kreislinie bewegt.

Versuchen wir doch mal Funktionsgleichungen aufzustellen:

Falls du nicht mehr weißt, wie man den Sinus bzw. den Kosinus aufstellt und was die Begriffe Kathete und Hypotenuse bedeuten, schauen sie doch noch mal in das Kapitel Sätze am rechtwinkeligen Dreieck S.103.

In der ersten Gleichung haben wir die vertikale Auslenkung (grüne Linie) gleich y gesetzt und gesehen, dass wir diese Auslenkung mit dem Sinus berechnen können. In der zweiten Gleichung haben wir die horizontale Auslenkung (rote Linie) gleich y gesetzt und stellen fest, dass wir diese Auslenkung mit dem Kosinus berechnen können.

$$\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{grüne\ Linie}{schwarze\ Linie} = \frac{y}{1} = y \quad \Rightarrow \quad y = \sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{rote\ Linie}{schwarze\ Linie} = \frac{y}{1} = y \quad \Rightarrow \quad y = \cos\alpha$$

Wir stellen fest:

Die Sinusfunktion stellt die Vertikale Auslenkung (grüne Linie) dar.
Die Kosinusfunktion stellt die Horizontale Auslenkung (rote Linie) dar.

Wie sehen nun diese Funktionsgleichungen aus? Um den beiden Graphen der beiden Funktionen y = sin α und y = cos α näher zu kommen, benutzen wir eine Wertetabelle. Versuche doch mal mit dem Taschenrechner auf die y-Werte der beiden folgenden Tabellen zu kommen, indem du die Werte für die Winkel α in die jeweilige Funktion einsetzen. Dabei ist wichtig, dass dein Taschenrechner auf DEG (Gradmaß) eingestellt ist (Standardeinstellung, falls du diese nicht verändert hast). Was Gradmaß genau bedeutet, werden wir später noch herausarbeiten.

Sinusfunktion

α	y
0	0
30	0,5
90	1
150	0,5
180	0
210	-0,5
270	-1
330	-0,5
360	0

Kosinusfunktion

α	y
0	1
60	0,5
90	0
120	-0,5
180	-1
240	-0,5
270	0
300	0,5
360	1

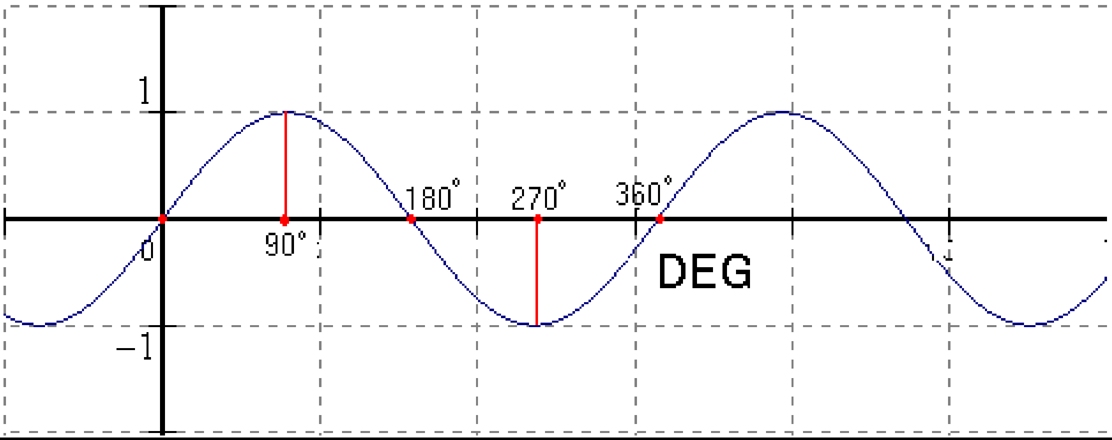
Versuche nun obige Wertepaare als Punkte in ein Koordinatensystem einzuzeichnen, wobei du die x-Achse mit den Winkeln beschriftest und für die y-Achse genügt die Einteilung von +1 bis -1. Versuche dann die Punkte sinnvoll zu verbinden und vergleiche anschließend dein Ergebnis mit den Graphen auf der folgenden Seite.

Auf der vorigen Seite haben wir gezeigt, dass

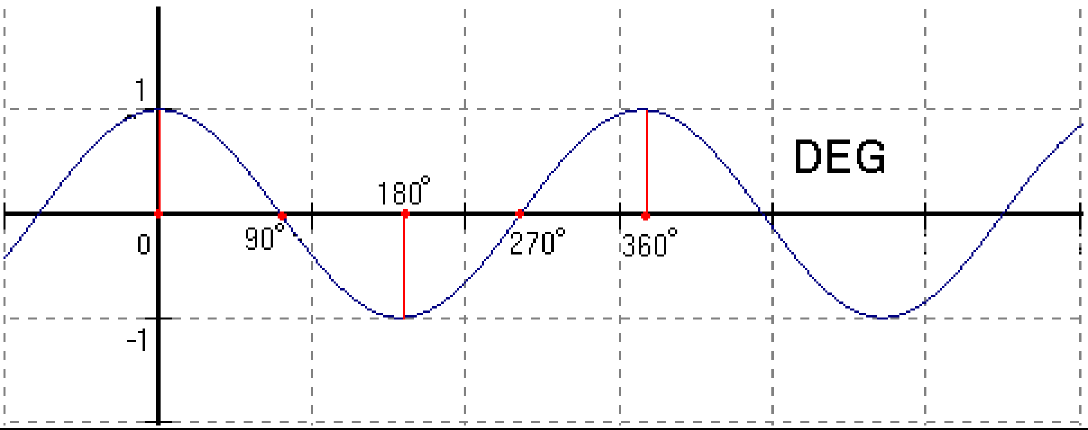
durch den Sinus einem Winkel eine vertikale Auslenkung zugeordnet wird,
durch den Kosinus einem Winkel eine horizontale Auslenkung zugeordnet wird.

Versucht man diese beiden Zusammenhänge grafisch darzustellen, erhält man folgende Funktionsverläufe (Das Zeichen DEG bedeutet, dass die x-Achse mit Winkeln beschriftet ist, einem Winkel wird also eine Auslenkung zugeordnet).

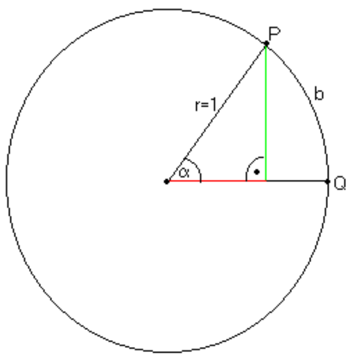
Die Sinusfunktion (DEG: x-Achse mit Winkeln beschriftet) ordnet einem Winkel eine vertikale Auslenkung zu. Versuche folgendes auch im Einheitskreis auf der vorigen Seite nachzuvollziehen. Bei $\alpha = 90$ Grad haben wir eine vertikale Auslenkung (grüne Linie) von 1. Bei 180 Grad haben wir eine vertikale Auslenkung von 0. Bei 270 Grad haben wir eine vertikale Auslenkung von -1, also 1 nach unten. Bei 30 Grad haben wir eine vertikale Auslenkung von 0,5.



Die Kosinusfunktion (DEG: x-Achse mit Winkeln beschriftet), ordnet einem Winkel eine horizontale Auslenkung zu. Versuche folgendes auch im Einheitskreis nachzuvollziehen. Bei $\alpha = 90$ Grad haben wir eine horizontale Auslenkung (rote Linie) von 0. Bei 180 Grad haben wir eine horizontale Auslenkung von 1 nach links. Bei 270 Grad haben wir eine horizontale Auslenkung von 0. Bei 60 Grad haben wir eine horizontale Auslenkung von 0,5.



An dieser Stelle möchte ich dir noch mal den Einheitskreis zeigen.



Ich möchte sie darauf hinweisen, dass das Dreieck nicht nur durch den Winkel definiert wird, sondern auch durch die Länge des Kreisbogens b. Man kann also nicht nur einem Winkel eine Auslenkung, sei es vertikal oder horizontal, zuordnen, sondern auch einem Kreisbogen.

Den Zusammenhang zwischen dem Winkel α und dem Kreisbogen b kann man auch als Formel darstellen: $\frac{\alpha}{360°} = \frac{b}{2\pi}$

Mit Hilfe dieser Formel kann man Winkel in Kreisbogenlänge und umgekehrt umrechnen. Man sagt, man wandelt Gradmaß (DEG) in Bogenmaß (RAD) und umgekehrt um.

Kontrolliere doch mal, ob folgende Umrechnungen okay sind:

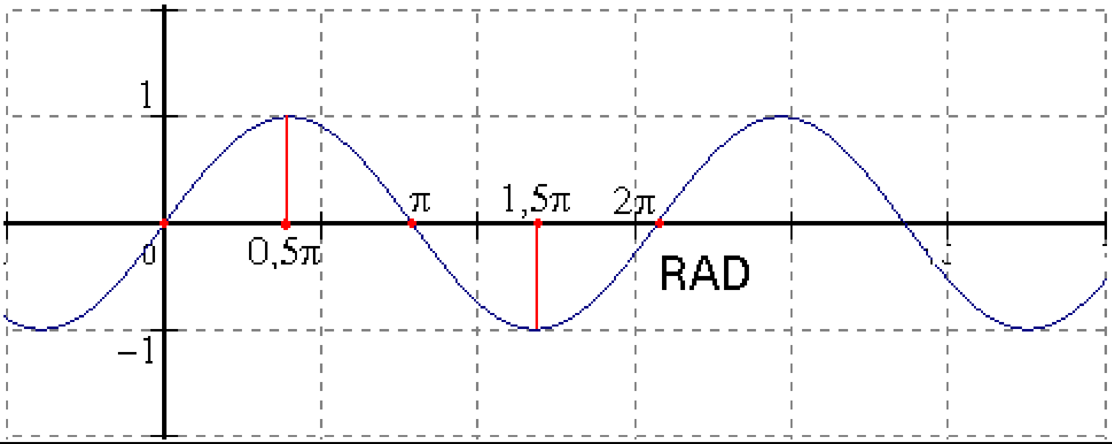
0 Grad = 0
90 Grad = 0,5π
180 Grad = π
270 Grad = 1,5 π
360 Grad = 2 π

Diese kleine Tabelle kann man sich auch folgendermaßen klarmachen. Ein Winkel scheint ja mit einem bestimmten Kreisbogen überein zustimmen. Denken wir doch mal an einen Vollkreis. Um den Kreis zu beschreiben, müsste der Winkel 360 Grad haben. Der Kreisbogen ist beim Vollkreis der gesamte Umfang und für den Umfang des Vollkreises gilt U = 2 π r. Da es sich bei unseren Betrachtungen um einen Einheitskreis mit r = 1 handelt, beträgt der Umfang 2 Pi und das ist auch der Kreisbogen. Damit haben wir gezeigt, dass dem Winkel 360 Grad der Kreisbogen 2 Pi gleichgestellt ist. Halbieren wir beide Werte, erhalten wir einen Halbkreis und wir erhalten weiterhin, dass 180 Grad das Gleiche ist wie der Kreisbogen des Halbkreises also die Hälfte des gesamten Kreises also nur Pi. So ergibt sich weiterhin, dass 90 Grad einem Viertelkreis entsprechen, also einem viertel von 2 Pi also 0,5 Pi.

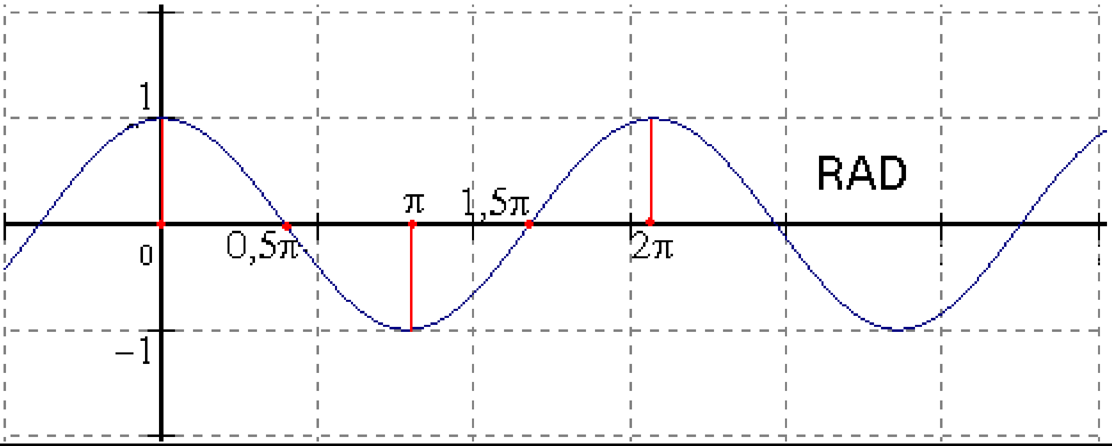
Diese Zusammenhänge solltest du dir mal merken, denn dann kannst du die beiden folgenden Graphen auf der folgenden Seite besser verstehen. In diesen Graphen sind nämlich wieder die beiden Funktionen y = sin(x) und y = cos(x) abgebildet, wobei für x diesmal nicht der Winkel α eingesetzt wird, sondern der Kreisbogen b.

In den beiden folgenden Graphen wird wie gesagt nicht einem Winkel eine Auslenkung zugeordnet, sondern einem Kreisbogen wird eine Auslenkung zugeordnet. Dies hat 2 Auswirkungen. Der Taschenrechner muss auf RAD (Bogenmaß) umgestellt werden und die x-Achse ist mit normalen Zahlen, genauer gesagt mit Vielfachen von Pi beschriftet:

Für den **Sinus**, der ja die vertikale Auslenkung darstellt, ergibt sich dann



Für den **Kosinus**, der ja die horizontale Auslenkung darstellt, ergibt sich dann:



Vergleiche bitte die beiden Graphen für das Bogenmaß (RAD) mit den Graphen für das Gradmaß (DEG) S.148.

Zusammenfassung Sinus- und Kosinusfunktion

Die Sinus- und die Kosinusfunktion sind allgemein definiert als:

$y = \sin(x)$ $y = \cos(x)$

Beide Funktionen kann man als **Gradmaß (DEG)** darstellen. Dabei wird einem Winkel α eine Auslenkung zugeordnet. Die x-Achse wird also mit Winkeln beschriftet, wobei man wissen sollte, wo die Winkel 0, 90, 180, 270 und 360 Grad liegen. Der Taschenrechner muss auf DEG eingestellt sein

$y = \sin \alpha$ $y = \cos \alpha$

Beide Funktionen kann man auch als **Bogenmaß (RAD)** darstellen. Dabei wird einem Kreisbogen b eine Auslenkung zugeordnet. Die x-Achse ist mit normalen Zahlen beschriftet bzw. genauer gesagt mit vielfachen der Zahl Pi. Man sollte wissen, wo 0, halbes Pi, Pi, Einundeinhalbes Pi und 2 Pi liegen. Den Taschenrechner bitte auf RAD einstellen.

$y = \sin b$ $y = \cos b$

Wichtig: Das y beim Sinus stellt eine Vertikale Auslenkung dar, während das y beim Kosinus eine Horizontale Auslenkung darstellt.

Die Tangensfunktion

Abschließend möchte ich nur noch ganz kurz die **Tangensfunktion** zeigen, die ja definiert ist als Sinus durch Kosinus. Den Graphen versteht man besser, wenn man überlegt, dass hier Polstellen S.137 (Definitionslücken) vorhanden sind, nämlich überall da, wo der Kosinus Null ergibt (Vielfache von 0,5 Pi). Die Definitionslücke ist deswegen da, da man durch Null nicht teilen kann und wo der Kosinus im Nenner Null wird, entsteht deswegen eine Polstelle.