1.11. Lineare Abhängigkeit

Vektoren sind linear abhängig, wenn sie sich gegenseitig darstellen können, wenn man also jeden Vektor durch den oder die anderen Vektoren darstellen kann.

Lineare Abhängigkeit bei 2 Vektoren:

2 Vektoren sind linear abhängig, wenn sie parallel sind. Dann kann man nämlich den einen Vektor durch verlängern oder verkürzen des anderen Vektors darstellen. Die Parallelität kann durch folgenden Ansatz gezeigt werden:

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

Falls du die genaue Anwendung des Ansatzes nicht mehr weißt, schau im Kapitel „Parallelität" (S. 25)nach.

Lineare Abhängigkeit bei 3 Vektoren:

3 Vektoren sind linear abhängig, wenn sie komplanar sind, sie also in einer Ebene liegen. Nur dann können sich die Vektoren gegenseitig darstellen. Die Komplanarprobe funktioniert nach folgenden Ansätzen:

$$\vec{a} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} \qquad \text{oder} \qquad r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$$

Falls du die genaue Anwendung der Ansätze nicht mehr weißt, schau im Kapitel „Komplanarprobe" (S.27) nach. Dort findest du auch die unten abgebildete Alternativmöglichkeit zur Prüfung bezüglich der Eigenschaft komplanar mittels Determinantenrechnung.

Alternativmöglichkeit zur Überprüfung der linearen Abhängigkeit von 3 Vektoren mithilfe der Determinantenrechnung:

Schreibe die 3 Vektoren direkt nacheinander in Matrixform.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

Berechne anschließend von dieser Matrix die Determinante. Falls du nicht mehr weißt, wie das funktioniert, schau unter „Determinanten" (Band 1) noch mal nach.

$$\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{komplanar} \qquad \det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \textit{nicht komplanar}$$

Ist die Determinante gleich 0, dann sind die 3 Vektoren komplanar
Ist die Determinante ungleich 0, dann sind die 3 Vektoren nicht komplanar.

Anmerkung zur Determinante: Ist die Determinante gleich Null, dann ist das der Matrix zugrunde liegende Gleichungssystem lösbar.