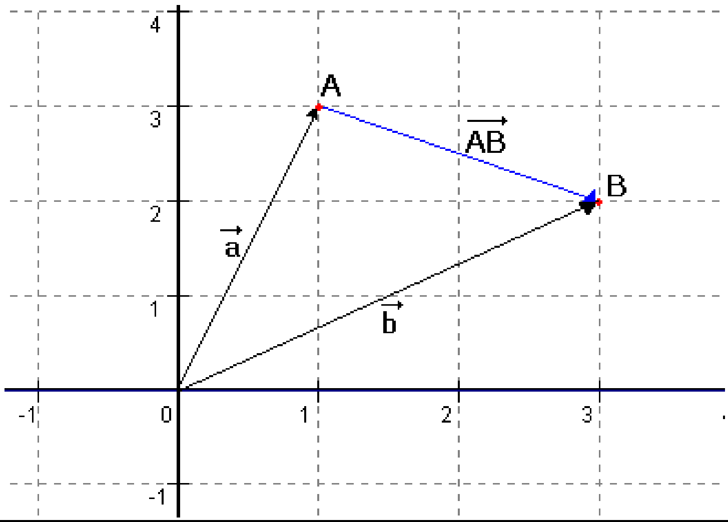
1.6. Vektor zwischen zwei Punkten bestimmen: Wir haben gerade gelernt, dass jeder Punkt im Koordinatensystem durch seinen Ortsvektor erreichbar ist. Vektoren bringen einen jedoch nicht nur vom Ursprung zu einem Punkt, sondern sie können einen von jedem beliebigen Punkt zu jedem anderen beliebigen Punkt bringen. In der folgenden Skizze kommt man mithilfe des Vektors AB vom Punkt A zu dem Punkt B. Diesen Vektor AB kann man anschließend sogar berechnen



In der Skizze sehen wir 2 Punkte in rot eingezeichnet, nämlich Punkt A und Punkt B. Der Punkt A hat die Koordinaten (1/3) und der Punkt B hat die Koordinaten (3/2). Vom Ursprung zu Punkt A führt der Ortsvektor a und vom Ursprung zu Punkt B führt der Ortsvektor b. Die Koordinaten der Punkte ergeben die Komponenten der Ortsvektoren und wir erhalten:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Noch mal zum besseren Verständnis, was der Vektor a bedeutet. Geht man vom Ursprung aus eine Einheit in x-Richtung und 3 Einheiten in y-Richtung, so gelangt man zu Punkt A. Das Gleiche funktioniert auch mit dem b Vektor, allerdings gelangt man mit diesem vom Ursprung zu Punkt B.

Das eigentliche Ziel dieser Aufgabe ist allerdings die Bestimmung von Vektor AB, der uns vom Punkt A zu Punkt B bringt. Dazu stellen wir folgenden Ansatz auf:

$$\vec{a} + \overrightarrow{AB} = \vec{b}$$

Verfolge bitte diese Gleichung im Koordinatensystem. Vektor a plus Vektor AB soll das Gleiche sein wie nur Vektor b. Die linke Seite führt uns zu Punkt B, indem wir zuerst dem Vektor a und anschließend dem Vektor AB folgen. Auch die rechte Seite führt uns zu Punkt B, allerdings auf direktem Wege, nämlich vom Ursprung zu Punkt B. Beide Seiten bringen uns also vom Ursprung zu Punkt B und deswegen steht das Gleichheitszeichen zu Recht da. Auf beiden Seiten stimmt also Anfangs- und Endpunkt überein. Was nicht übereinstimmt, ist die zurückgelegte Strecke, aber darum geht es hier nicht. Wenn wir obigen Ansatz nach Vektor AB auflösen, indem wir auf beiden Seiten den Vektor a abziehen, dann erhalten wir

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ oder in Worten: **Pfeilende minus Pfeilanfang (hinten minus vorne)**

Den Ausdruck „Pfeilende minus Pfeilanfang" bzw. „hinten minus vorne" solltest du dir unbedingt merken, denn damit kannst du jeden Vektor, der 2 Punkte verbindet, berechnen, wenn du die Koordinaten der Punkte und somit die entsprechenden Ortsvektoren kennst. Wie das umgesetzt wird, zeige ich dir, indem wir die Aufgabe fertig rechnen. Wir haben ja immer noch das Ziel, den Vektor AB zu bestimmen und gemäß der Gleichung ganz unten auf der vorigen Seite müssen wir Pfeilende minus Pfeilanfang rechnen. Der Pfeil führt von Punkt A zu Punkt B, also ist der Punkt A der Pfeilanfang und der Punkt B das Pfeilende. Gemäß Pfeilende minus Pfeilanfang ergibt sich

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

Die Ortsvektoren Vektor a und b hatten wir auf der vorigen Seite ja auch schon bestimmt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad und \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Somit haben wir den Vektor AB bestimmt und können auch in der Skizze (vorige Seite) noch mal prüfen, ob das auch passt. Der Vektor AB führt uns vom Punkt A zu Punkt B, indem wir zuerst 2 Einheiten in x-Richtung gehen und anschließend eine Einheit in y-Richtung gehen, allerdings wegen des Minuszeichens nach unten.

Anmerkung: Wir haben soeben den Vektor AB berechnet, der uns von Punkt A zu Punkt B führt. Den Vektor BA, der uns von Punkt B zu Punkt A führt, können wir ganz leicht bestimmen, indem wir das Vorzeichen jeder Komponente umdrehen. Tu das bitte und vollziehe das Ergebnis in der Skizze nach. Der Vektor BA hat übrigens die gleiche Länge, wie der Vektor AB, zeigt allerdings in die genau entgegen gesetzte Richtung.

Übe doch bitte das soeben Gelernte an folgender Aufgabe:

Gegeben sind die Punkte C (5/0) und D (1/2). Bestimme den Vektor CD, der von Punkt C zu Punkt D verläuft, indem du

1. Die beiden Punkte in ein Koordinatensystem einzeichnen.
2. Die Ortsvektoren bestimmst und einzeichnest.
3. Den gesuchten Vektor einzeichnest und mittels Pfeilende minus Pfeilanfang bestimmst.
4. Überprüfe dein Ergebnis auch nochmals in der Skizze.
5. Bestimme anschließend den Vektor DC, indem du die Vorzeichen der Komponenten. rumdrehst und überprüfe dein Ergebnis in der Skizze wieder.

Lösung: $\vec{CD} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{DC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$