1.11.1. Parallelität

Zeigen 2 Vektoren in die gleiche oder genau entgegen gesetzte Richtung, so sind sie parallel (kollinear) zueinander. Die Tatsache, dass 2 Vektoren parallel zueinander sind, kann man oft mit bloßem Auge erkennen, muss allerdings anschließend meist noch mathematisch zeigen, dass die Vektoren tatsächlich parallel zueinander sind.

Wie man Parallelität mit bloßem Auge erkennen kann, zeige ich dir an den folgenden 3 Vektoren:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir uns zunächst die Vektoren a und b. Wenn die beiden parallel sein sollen, dann muss man den einen Vektor mit einer Zahl multiplizieren und soll dann den anderen Vektor erhalten. Das muss mit jeder Komponente funktionieren.
Um aus dem Vektor a den Vektor b zu machen, muss man die erste Komponente mit 2 multiplizieren, denn 2 mal 1 ergibt 2. Die zweite und dritte Komponente muss man auch mit 2 multiplizieren. Wenn man also jede Komponente des Vektors a mit 2 multipliziert, dann erhält man den Vektor b. Damit ist gezeigt, dass Vektor a parallel zu Vektor b ist.
Betrachten wir nun Vektor a und c. Auch hier wollen wir wieder versuchen, aus Vektor a durch Multiplikation mit einer Zahl den Vektor c herzustellen. Die erste Komponente von Vektor a muss man mit 3 multiplizieren, um auf die erste Komponente des Vektors c zu kommen. Multipliziert man die zweite Komponente (2) des Vektors a ebenfalls mit der 3, erhält man nicht die zweite Komponente (5) des Vektors c. Somit ist gezeigt, dass man den Vektor a nicht durch Multiplikation mit einer Zahl in den Vektor c umwandeln kann und deshalb sind die Vektoren a und c nicht parallel.

Versuchen wir doch nun mal die Parallelität von Vektor a und b mathematisch zu zeigen

Folgender Ansatz muss erfüllt sein: $k \cdot \vec{a} = \vec{b}$

Der Ansatz bedeutet eigentlich nur, dass man den Vektor a mit einer Zahl so multiplizieren soll, dass der Vektor b herauskommt.

$$k \cdot \vec{a} = \vec{b}$$

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} 1k = 2 & \Rightarrow & k = 2 \\ 2k = 4 & \Rightarrow & k = 2 \\ 3k = 6 & \Rightarrow & k = 2 \end{array}$$

In den Ansatz werden die beiden Vektoren eingesetzt. Aus einer Gleichung mit den Vektoren entstehen durch „aufdröseln“ 3 Gleichungen mit den Komponenten der Vektoren. Löst man jede Gleichung nach k auf, so erhält man für k immer den gleichen Wert und deswegen ist der Vektor a parallel zu Vektor b.
Untersuchen wir doch mal nach dem gleichen Schema die Vektoren a und c

$k \cdot \vec{a} = \vec{c}$

$$k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} 1k = 3 & \Rightarrow & k = 3 \\ 2k = 5 & \Rightarrow & k = 2{,}5 \\ 3k = 9 & \Rightarrow & k = 3 \end{array}$$

Auch hier werden in den Ansatz die Vektoren eingesetzt. Aus der Vektorengleichung entstehen durch „aufdröseln“ die Komponentengleichungen und jede dieser Gleichungen wird nach k aufgelöst. Für k kommt diesmal nicht überall der gleiche Wert raus und deswegen sind die Vektoren a und c auch nicht parallel zueinander. Man kann eigentlich schon in dem Moment aufhören, wo für k an einer Stelle unterschiedliche Werte herauskommen. Die Variable k kann nämlich nicht gleichzeitig den Wert 3 und auch den Wert 2,5 annehmen.

Prinzipiell läuft die Interpretation so, dass ein Widerspruch anzeigt, dass die beiden Vektoren nicht parallel sind, während wahre Aussagen anzeigen, dass die beiden Vektoren parallel sind.

Falsche Aussagen (Widerspruch) könnten so aussehen: Für k kommen unterschiedliche Werte raus oder in einer Zeile selbst liegt der Widerspruch.

$$\begin{array}{lll} k & = & 5 \\ k & = & 5 \\ k & = & 4 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} k & = & 3 \\ k & = & 3 \\ 0 & = & 5 \end{array}$$

Wahre Aussagen könnten so aussehen: Für k kommen nur gleiche Werte raus, wobei eine Zeile der Art 0 = 0 oder 5 = 5 nicht stört, denn es bleibt ja eine wahre Aussage.

$$\begin{array}{lll} k & = & 5 \\ k & = & 5 \\ k & = & 5 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} k & = & 3 \\ k & = & 3 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$