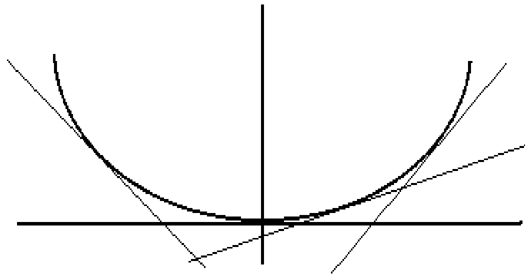
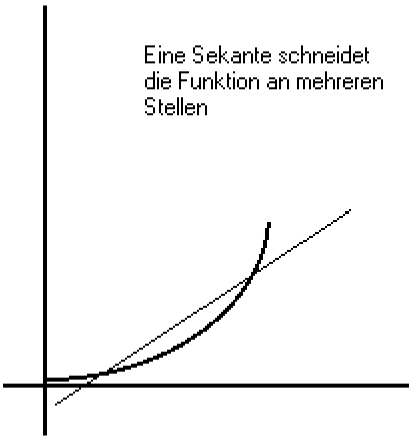
7. DIFFERENTIALRECHNUNG

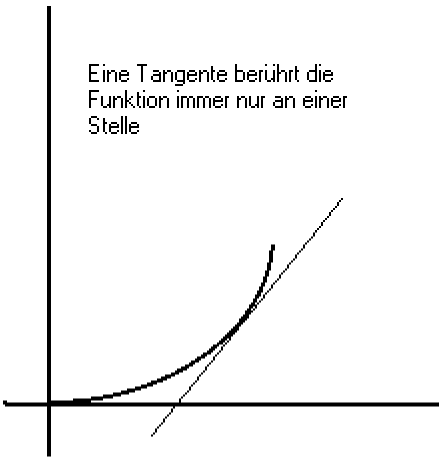
7.1. Beweis über den Differenzen- bzw. Differentialquotienten

Im Folgenden geht es um Steigung und insbesondere um die Steigung in einem Punkt. In Linearen Funktionen (Geraden) ist die Steigung, wie du vielleicht weißt, in jedem Punkt gleich. In quadratischen Funktionen (Parabeln) ist die Steigung in jedem Punkt unterschiedlich, wie du an der nebenstehenden Skizze erkennen kannst. Die Steigung in einem Punkt wird dabei sichtbar gemacht, indem man an den Punkt eine Tangente zeichnet. Die Steigung des Punktes ist nämlich mit der Steigung der Tangente identisch.



Eine **Tangente** (rechts in der unteren Skizze) ist übrigens eine Gerade, die die Funktion nur an einem Punkt berührt. Die Tangente streift die Funktion sozusagen hauchdünn. Klären wir an dieser Stelle gleich noch den Begriff der Sekante, die wir auch gleich benötigen werden. Eine **Sekante** (links in der unteren Skizze) schneidet die Funktion an mind. 2 Stellen (Punkten). Eine Tangente berührt also die Funktion an einem Punkt, während eine Sekante die Funktion in mind. 2 Punkten schneidet.





Da die Steigung im Punkt genau so groß ist wie die Steigung der Tangente, sagt man jetzt, wenn man die Steigung von der Tangente wüsste, dann wüsste man auch die Steigung im Punkt. Also muss man versuchen, die Steigung der Tangente zu bestimmen. Dazu muss man wieder einen Umweg gehen, denn die Steigung der Tangente lässt sich nicht so einfach bestimmen. Die Lösung des Problems liegt darin, dass man nicht sofort die Tangentensteigung bestimmt, sondern zunächst die Steigung einer Sekante bestimmt, die durch den Punkt, von dem wir die Steigung wissen möchten (an dem auch die Tangente anliegt), und einen weiteren Punkt der Funktion verläuft. Die Sekante schneidet ja wie bereits oben erklärt die Funktion an 2 Stellen (Punkten).

Beweisablauf: Nachdem einige Grundlagen für das Verständnis des Beweises gesetzt wurden, kann es mit dem Beweis ja losgehen. Den groben Ablauf des Beweises will ich schon jetzt erläutern: Zunächst wird eine Skizze angefertigt, an der man dann eine Formel für die Sekantensteigen m_s *(Differenzenquotient)* entwickelt, um daraus wiederum eine Formel für die Tangentensteigung m_t *(Differentialquotient)* zu entwickeln.

Vorbemerkung: Im folgenden Text wirst du mit den Begriffen **waagrecht** und **senkrecht** konfrontiert. Für Vergessliche sei hier noch mal kurz erklärt, was damit gemeint ist. Ziehst man eine Linie von links nach rechts oder von rechts nach links, so erhält man eine *waagrechte Linie*, man sagt auch *horizontal*. Zieht man eine Linie von oben nach unten oder von unten nach oben, so erhält man eine *senkrechte Linie*, man sagt auch *vertikal.*

1. Zeichne ein **Koordinatensystem**, wobei der erste Quadrant genügt. Damit ist gemeint, dass nur der positive Teil der x und y-Achse benötigt wird.

2. Zeichne in das Koordinatensystem nur den rechten Flügel einer beliebigen quadratischen Funktion (Parabel). Der **rechte Flügel der Parabel** sollte anfangs eher flach sein und je weiter du nach rechts oben gehst immer stärker ansteigen.

3. Markiere auf der Funktion **2 Punkte**. Der eine Punkt sollte eher unten im flachen Stück der Parabel sein, und der andere Punkt rechts oben im steileren Stück der Parabel.

4. Durch die beiden Punkte ziehe jetzt bitte eine Gerade und schon haben wir eine **Sekante** konstruiert. Eine Sekante schneidet nämlich die Funktion in zwei Punkten.

5. Vom unteren Punkt ausgehend ziehe bitte eine gestrichelte Linie senkrecht nach unten bis zur x-Achse und wieder vom Punkt ausgehend noch eine gestrichelte Linie waagrecht nach links bis zur y-Achse. Die Stelle, an der die Linie die x-Achse berührt, bezeichnen wir mit x. Die Stelle, an der die Linie die y-Achse berührt, bezeichnen wir mit f(x). **Der untere Punkt hat also die Koordinaten (x / f(x)).**

6. Was in Punkt 5 mit dem unteren Punkt gemacht wurde, passiert jetzt mit dem oberen Punkt. Wir zeichnen also wieder eine senkrechte und eine waagrechte gestrichelte Linie, jeweils vom Punkt ausgehend bis zu den Achsen. Die Stelle, an der die x-Achse berührt wird, bezeichnen wir mit x+h. Die Stelle, an der die y-Achse berührt wird, bezeichnen wir mit f(x+h). **Der obere Punkt hat somit die Koordinaten (x+h / f(x+h)).**

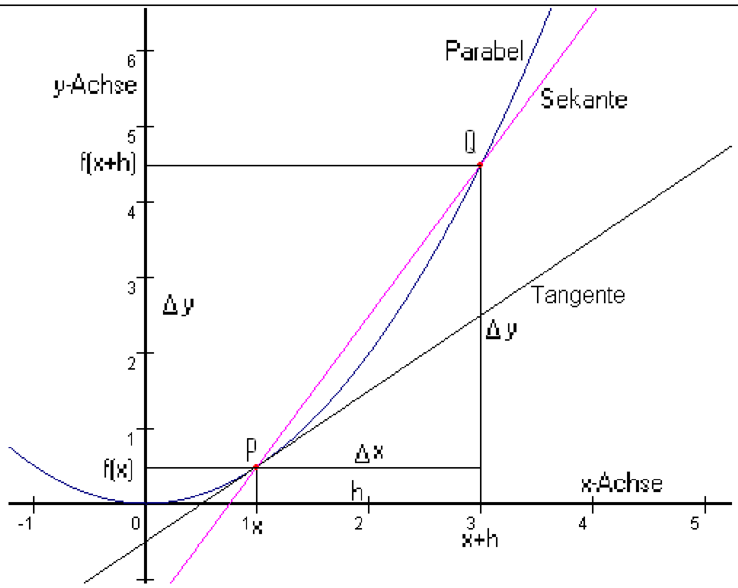
7. Auf der x-Achse haben wir jetzt 2 Stellen markiert. Die Linke heißt x, die Rechte x+h. Jetzt überlege doch mal, wie man die Strecke zwischen den beiden Stellen sinnvoller weise bezeichnen könnte. Schau dazu auf deine Skizze. Vielleicht erscheint es dir als logisch, wenn man diese Strecke mit **h** bezeichnet, denn x plus h ergibt ja x+h. Trage also den Buchstaben h in die Skizze ein.

8. Im nächsten Schritt sollst du ein **Steigungsdreieck** einzeichnen. Das ist dir vielleicht noch von den Linearen Funktionen ein Begriff. Zeichne das Steigungsdreieck, indem du von dem unteren Punkt ausgehend eine gestrichelte waagrechte Linie nach rechts zeichnest, und zwar so weit, bis du auf die senkrechte gestrichelte Linie triffst.

9. Den waagrechten Teil des Steigungsdreiecks nennen wir **Δx** (Delta x) und den senkrechten Teil des Steigungsdreiecks nennen wir **Δy** (Delta y). Das Δ (Delta) ist als eine Art Differenz aufzufassen, nämlich einmal eine Differenz bezüglich de x-Achse (Δx) und einmal eine Differenz bezüglich der y-Achse (Δy), die jeweils durch die 2 Punkte ausgelöst wird.

10. Die y-Achse ist übrigens auch an 2 Stellen markiert. Die untere heißt f(x) und die obere f(x+h). Wie könnte man die Strecke dazwischen bezeichnen? Schau auch dazu in deine Skizze. Nach einiger Zeit fällt dir vielleicht auf, dass man diese Strecke auch mit **Δy** bezeichnen könnte. Das tun wir dann auch.

11. Vergleiche bitte deine Skizze mit der auf der folgenden Seite !!!



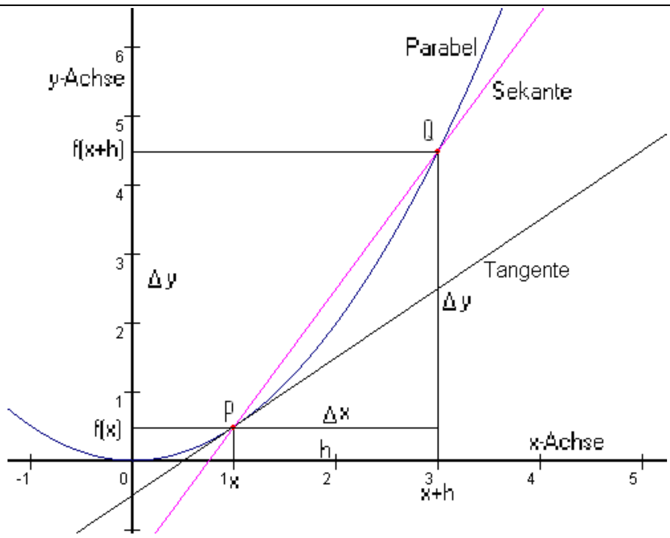
In obiger Skizze sehen wir also eine Funktion, die von einer Sekante zwei mal geschnitten wird, wobei die Koordinaten des Punktes unten links (x / f(x)) und die Koordinaten des Punktes oben rechts (x+h / f(x+h)) sind. Weiterhin ist ein Steigungsdreieck zu sehen, welches mit Δx und Δy bezeichnet ist. Wie oben zu Beginn des Beweises geschildert, suchen wir eigentlich die Steigung im Punkt links unten. Diese ist genau so groß wie die Steigung einer Tangente, die man an diesen Punkt zeichnen könnte. Die Tangente berührt die Funktion im Punkt P. Auf jeden Fall ist die Tangentensteigung nicht so leicht zu bestimmen und deswegen versucht man die Steigung einer Sekante zu bestimmen, die durch den Punkt unten links, von dem wir die Steigung wissen möchten, und einen weiteren Punkt (oben rechts) verläuft. Die Sekante sehen wir oben in der Skizze und deren Steigung kann man mit folgendem Ansatz bestimmen, den du vielleicht noch von linearen Funktionen her kennst. Die Steigung m ist der Quotient aus Δy und Δx. Da es sich um die Sekantensteigung handelt bezeichnen wir sie mit m_s

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Im nächsten Schritt haben wir Δx durch h ersetzt. Schau in der Skizze nach, dass Δx wirklich das Gleiche wie h ist. Dann haben wir Δy durch einen Ausdruck ersetzt, den ich kurz erläutern muss. Auch dazu muss man in obige Skizze schauen. Δy ist ja der senkrechte Teil des Steigungsdreieckes. Δy finden wir aber auch an der y-Achse wieder, es ist nämlich die Strecke zwischen f(x) und f(x+h). Mathematisch kann man diese Strecke durch den Ausdruck **f(x+h) minus f(x)** beschreiben und dadurch haben wir in obiger Formel Δy ersetzt.

Den entstandenen Ausdruck nennen wir **Differenzenquotient**. Quotient, weil ein Bruch eben ein Quotient ist, und Differenz, weil im Zähler und im Nenner Differenzen (Subtraktionen bzw. Minus-Rechnungen) sind. Im Zähler ist das Minus offensichtlich, im Nenner verbirgt sich hinter der Variable h auch eine Differenz, nämlich x+h minus x**. Entscheidend ist, dass** m_s **der <u>Differenzenquotient</u> ist, mit dessen Hilfe man die Sekantensteigung berechnen kann.**

$$m_s = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Obige Skizze ist die Gleiche wie die auf der vorigen Seite. Die Tangente berührt den Punkt P (x / f(x)). Warum taucht hier jetzt die Tangente auf. Dazu muss man noch mal an das eigentliche Ziel denken. Wir wollen ja die Steigung im Punkt P unten links bestimmen, die ja genau so groß ist wie die Steigung der Tangente. Diese wollen wir nun bestimmen, indem wir aus der Sekante eine Tangente machen. Dies gelingt uns mit der Vorstellung, dass der Punkt Q oben rechts auf der Funktion zu dem Punkt P unten links wandert. Je näher der obere Punkt Q an den unteren kommt, desto geringer wird die Steigung der Sekante und in dem Moment, wo der obere Punkt Q genau beim unteren Punkt P angekommen ist, wird aus der Sekante eine Tangente. Überlege, was mit dem Wert von h passiert, wenn der obere Punkt Q zu dem unteren Punkt P wandert. Vielleicht bist du darauf gekommen, dass, je näher der obere Punkt Q dem unteren Punkt P kommt, h immer kleiner wird und in dem Moment, wo sich die beiden Punkte vereinigen, h Null ist. Mathematisch erreicht man die Umwandlung der Sekante in eine Tangente, indem man h gegen Null laufen lässt. Man bildet also den Grenzwert h gegen Null, und schreibt diesen Ausdruck vor die Sekantensteigung. Wir erhalten dann für die Tangentensteigung m_t

$$m_t = \lim_{h \to 0} m_s$$

$$m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Diesen Ausdruck nennt man <u>Differentialquotient</u> und dieser liefert uns die Tangentensteigung. Somit sind wir am Ziel, denn wir können jetzt mithilfe des Differentialquotienten die Tangentensteigung bestimmen und diese ist ja, wie bereits öfters erwähnt, genau so groß wie die Steigung im Punkt, die wir ja eigentlich wissen wollten.

Was man mit dem Differentialquotienten genau machen kann, siehst du an dem Beispiel auf der folgenden Seite, aber so viel schon vorweg. Mit dem Differentialquotienten kann man eine gegebene Funktion ableiten, denn $f'(x) = m_t$. **Setzt man in die erste Ableitung übrigens den x-Wert eines Punktes ein, so erhält man die Steigung in diesem Punkt.** In der praktischen Anwendung ist dies allerdings viel zu umständlich und zu kompliziert. In der Praxis bildet man die Ableitung mit den entsprechenden Regeln, die im Abschnitt „Ableitungsregeln“ S.205 dargestellt sind. Die Ableitung über den Differentialquotienten soll nur die Hintergründe der Differentialrechnung klar machen.

Wir halten fest: Die erste Ableitung ist nichts anderes als die Steigung, also $f'(x) = m$

Übung zum Beweis: Bilde von f(x) = x² die erste Ableitung mit Hilfe des Differentialquotienten. Berechne anschließend die Steigung im Punkt P (2 / 4).

Als Ansatz schreiben wir zunächst den Differentialquotienten auf. Ganz links steht die mathematische Darstellung der ersten Ableitung (f Strich von x). Die erste Ableitung ist ja nichts anderes als die Steigung (m) und die Steigung ist eben der Differentialquotient.

$$f'(x) = m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

In diesen Differentialquotienten wird nun f(x) und f(x+h) eingesetzt. Dabei dürfte das Einsetzen von f(x) kein Problem sein. Für dich stellt sich jetzt sicher die Frage, was ist denn f(x+h). Wenn man f(x+h) bilden möchte, dann muss man überall wo ein x steht, den Term x+h einsetzen. Da ein Term eingesetzt wird, muss dieser eingeklammert werden.

$$f(x) = x^2$$
$$f(x+h) = (x+h)^2$$

Beides wird wie gesagt in den Differentialquotienten eingesetzt und man erhält dann

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h}$$

Den Limes (Grenzwert) vor dem Bruch müssen wir zunächst ignorieren, da es an dieser Stelle noch verboten ist, den Grenzübergang zu machen. Wer Probleme mit dem Limeszeichen an dieser Stelle hat, sollte im Kapitel Grenzwert S.69 insbesondere noch mal den Grenzübergang nachlesen. An dieser Stelle ist der Grenzübergang, wie bereits erwähnt, noch nicht erlaubt, denn, wenn man h gegen Null laufen lassen würde, dann würde der Nenner Null werden und das darf nicht passieren, denn man darf ja nicht durch Null teilen. Also kümmern wir uns erst um den Zähler. Wir lösen die Klammer mithilfe des ersten Binoms auf und fassen anschließend den Term zusammen. Dabei fällt x² im Zähler heraus. Den Grenzübergang dürfen wir, aus oben bereits erwähnten Gründen, immer noch nicht durchführen. Um dieses Problem zu beheben, müssen wir im Zähler h ausklammern, um das h anschließend wegkürzen zu können:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h \cdot (2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h = 2x + 0 = 2x$$

Nachdem h rausgekürzt wurde, kann man endlich auch den Grenzübergang erledigen. Der Limes entfällt und für h wird 0 eingesetzt. So entsteht 2x als erste Ableitung. Wer sich schon mit den Ableitungsregeln auskennt, der weiß, dass man darauf auch viel leichter kommen kann. Überlegen sie doch mal, wie man wohl von x² zu 2x kommt.

In der Aufgabe ist ja noch nach der Steigung (m) im Punkt P (2 / 4) gefragt. Man muss einfach nur den x-Wert des Punktes in die erste Ableitung einsetzen und erhält die Steigung im Punkt P

$$f'(x) = 2x \qquad \Rightarrow \qquad f'(2) = 2 \cdot 2 = 4 \qquad \Rightarrow \qquad m = 4$$