8.3.3. Integration durch Partielles Integrieren

Auf den bisherigen Seiten hast du schon eine Menge an Regeln gelernt, mit denen du viele Funktionen integrieren kannst. Leider wirst du damit bei der Funktion f(x) = 2x · sin(x) keinen Erfolg haben. Problematisch ist bei dieser Funktion, dass es sich um eine Multiplikation handelt. Schon beim Differenzieren (Ableiten) mussten wir in solch einem Fall auf die Produktregel zurückgreifen. Beim Integrieren gibt es so was ähnliches, allerdings spricht man da von Partiellem Integrieren. Die Regel im Einzelnen:

$$f(x) = u' \cdot v \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = \int f(x)\, dx = \int u' \cdot v\, dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\, dx$$

Hinweis: Wähle v so, dass durch Ableiten (evtl. auch mehrmals) eine Konstante entsteht.

Tipp: Du solltest dir hier unbedingt eine kleine Tabelle, bestehend aus u, v, u Strich und v Strich, anlegen, damit du einen besseren Überblick über die Aufgabe hast!!!

Die Regel sieht ja wieder wüst aus. Zum besseren Verständnis wie immer ein Beispiel:

$f(x) = 2x \cdot \cos(x)$ und gesucht ist die Stammfunktion F(x), also $\int$ f(x) dx

Zunächst muss man u Strich und v bestimmen, wobei man ja v so wählen soll, dass durch ein oder mehrmaliges Ableiten eine Konstante entsteht. Der cos(x) kann also nicht v sein, denn die Ableitung ergibt keine Konstante. Also bleibt für v nur 2x übrig und die Ableitung von 2x ergibt auch eine Konstante, nämlich 2. Wir entscheiden uns also für v = 2x. Der cos(x) muss dann also u Strich sein. Um die Tabelle zu vervollständigen, bilden wir v Strich durch Ableiten von v und anschließend u durch Integrieren von u Strich. Es ergibt sich also folgende Tabelle:

$$\begin{array}{ll} u = \sin(x) & u' = \cos(x) \\ v = 2x & v' = 2 \end{array}$$

Diese Daten in die Formel für Partielles Integrieren einsetzen und anschließend die Konstante v Strich, hier die 2, vor das Integral ziehen, was ja gemäß den Eigenschaften von Integralen eine erlaubte Umformung ist.

$$F(x) = \int u' \cdot v\, dx = u \cdot v - \int u \cdot v'\, dx$$

$$\int \cos(x) \cdot 2x\, dx = \sin(x) \cdot 2x - \int \sin(x) \cdot 2\, dx$$

$$\int \cos(x) \cdot 2x\, dx = \sin(x) \cdot 2x - 2 \cdot \int \sin(x)\, dx$$

$$\int \cos(x) \cdot 2x\, dx = \sin(x) \cdot 2x - 2 \cdot \left[-\cos(x)\right]$$

$$\int \cos(x) \cdot 2x\, dx = \sin(x) \cdot 2x + 2 \cdot \cos(x)$$

$$\int \cos(x) \cdot 2x\, dx = 2 \cdot \left[\sin(x) \cdot x + \cos(x)\right]$$

Durch das Vorziehen der Konstante kann man das hintere Integral berechnen und anschließend den gesamten Term vereinfachen. Wenn du die Ableitungsregeln noch kannst, dann leite zur Probe die Stammfunktion ab. Du müsstest ja dann f(x) erhalten.

Das Partielle Integrieren wird sich dir nicht sofort erschließen. Das musst du öfters üben

Versuche doch mal die folgenden Aufgaben:

1. $f(x) = 5x \cdot e^x$ 2. $f(x) = x^2 \cdot e^x$ 3. $f(x) = e^x \cdot \sin(x)$

Lösungshinweise und Lösungen findest du in den folgenden Kästchen:

Die **erste Aufgabe** ist noch mal zum Anfreunden mit der Formel. Die Lösung lautet:

$F(x) = 5xe^x - 5e^x = 5e^x \cdot (x-1)$ nach dem Gleichheitszeichen wurde ausgeklammert

Bei der **zweiten Aufgabe** muss man die Formel 2-mal anwenden, um eine Konstante im Integral zu erhalten. Durch einfaches Einsetzen in die Formel erhält man:

$$F(x) = e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \, dx$$

Hinten im Integral ist jetzt leider keine Konstante entstanden, also nur für den hinteren Teil noch mal die Formel anwenden und das Ergebnis für das hintere Integral einsetzen.

$$F(x) = e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x + 2e^x = e^x \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right)$$

Bei der **dritten Aufgabe** ist es genauso, allerdings erhältst du durch zweimaliges Anwenden der Formel im hinteren Integral keine Konstante, sondern einen Ausdruck, den du auf der linken Seite des Gleichheitszeichens schon stehen hast. Überlege, wie es dann weitergehen könnte.

Durch einfaches Einsetzen in die Formel erhalten wir:

$$\int e^x \cdot \sin(x) \, dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cdot \cos(x) \, dx$$

Auch hier ist hinten in dem Integral keine Konstante entstanden und so muss man die Formel nur auf das hintere Integral erneut anwenden und das Ergebnis für das Integral einsetzen

$$\int e^x \cdot \sin(x) \, dx = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \cdot (-\sin x) \, dx$$

Jetzt ziehen wir das Minus im hinteren Integral vor das Integral und sehen dann, dass die linke Seite identisch mit dem Integral ganz rechts ist und formen entsprechend um:

$$\int e^x \cdot \sin(x) \, dx = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \cdot \sin(x) \, dx \quad \Big| + \int e^x \cdot \sin(x)$$

$$2 \cdot \int e^x \cdot \sin(x) \, dx = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) \quad \Big| : 2$$

$$\int e^x \cdot \sin(x) \, dx = \frac{e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x)}{2} = \frac{e^x \cdot [\sin(x) - \cos(x)]}{2}$$