

### 3.1.5. Werkzeug 5: Polynomdivision mit dem Linearfaktor

**Anwendungsgebiet:**  $x$  kommt mehrmals mit unterschiedlichen Potenzen (nicht nur gerade) vor und es existiert ein absolutes Glied, da sonst Werkzeug 2 funktioniert

**Beispiele:**  $x^3 + 2x^2 - 5x + 6 = 0$  oder  $x^4 + 6x^3 - 4x^2 + 8x - 5 = 9$

#### Vorgehensweise:

Die erste Lösung muss durch Probieren herausgefunden werden, wobei potentielle Lösungen die positiven und negativen Teiler des absoluten Gliedes (bei obiger erster Aufgabe die 6) sind. Also die  $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ . Ist eine Lösung bekannt, z.B. die + 3, dann erhält man den Linearfaktor  $(x - 3)$ , bei dem das Vorzeichen der Lösung einfach umzudrehen ist. Mit diesem Linearfaktor wird dann die Polynomdivision durchgeführt und man erhält in unserem Beispiel dann aus dem Polynom 3.Grades einen Polynom 2.Grades (also eine quadratische Gleichung) die man mit der pq-Formel lösen kann.

**Beispielaufgabe:**  $x^3 + 3x^2 - 13x - 15 = 0$

Die erste Lösung muss ja durch Probieren herausgefunden werden, wobei potentielle Lösungen positive und negative Teiler der 15 sind, also  $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$ .

Probieren wir doch einfach mal die 1 und wir erhalten dann:

$$1^3 + 3 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 - 15 = -24 \Rightarrow 1 \text{ ist also keine Lösung, denn es muss ja Null rauskommen.}$$

Probieren wir als nächstes einfach mal die  $-1$  und wir erhalten dann:

$$(-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 13 \cdot (-1) - 15 = 0 \Rightarrow -1 \text{ ist eine Lösung !!!}$$

Daraus ergibt sich folgender Linearfaktor (Vorzeichen rundrehen):  $(x + 1)$

Mit diesem Linearfaktor wird nun die Polynomdivision durchgeführt:

$$(x^3 + 3x^2 - 13x - 15) : (x + 1) \text{ und Ergebnis ist dann } x^2 + 2x - 15$$

**Die einzelnen Schritte der Polynomdivision siehst du auf der nächsten Seite.**

Außerdem findest du ein weiteres Beispiel auf [Seite 142](#).

Entscheidend ist aber, dass bei der Polynomdivision aus dem Polynom 3.Grades ein Polynom 2. Grades (quadratische Gleichung) entstanden ist, den man mit dem Werkzeug #3 (pq-Formel) lösen kann und somit evtl. 2 weitere Lösungen erhält.

$x^2 + 2x - 15 = 0$  mit pq-Formel gelöst führt noch zu den beiden Lösungen

$$x_1 = 3 \text{ und } x_2 = -5$$

**Falls dir die Polynomdivision zu kompliziert ist, beachte auch die Alternative zum Werkzeug Nummer 5, nämlich das Horner-Schema auf der übernächsten Seite**

## Durchführung der Polynomdivision mit dem Linearfaktor

$$\begin{array}{r} (x^3 + 3x^2 - 13x - 15) : (x + 1) = x^2 + 2x - 15 \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline 2x^2 - 13x \\ -(2x^2 + 2x) \\ \hline -15x - 15 \\ -(-15x - 15) \\ \hline 0 \end{array}$$

Diese Rechnung muss ich jetzt wahrscheinlich erklären, denn sie entsteht ja auch nicht auf einmal sondern nach und nach. Damit du den Rechenweg gut nachvollziehen kannst, schreibe doch zunächst einmal nur die Aufgabe auf, also nur die erste Zeile ohne die Lösung hinter dem Gleichheitszeichen.

Dann schreibe  $x^2$  hinter das Gleichheitszeichen, aber warum? Man muss sich an dieser Stelle die  $x^3$  ganz vorne durch das  $x$  des Linearfaktors (zweite Klammer) teilen und man erhält dann eben  $x^2$ .

**Tipp:** Schreibe das am besten als Bruch und Kürze:  $\frac{x^3}{x} = x^2$

Die  $x^2$  notieren wir wie gesagt hinter dem Gleichheitszeichen. Jetzt müssen wir  $x^2$  mit dem Linearfaktor multiplizieren und das Ergebnis in die zweite Zeile schreiben. Eine Klammer drum rum, Strich drunter und ein Minus davor. Jetzt rechnen wir  $x^3$  minus  $x^3$  (fällt weg) und  $3x^2$  minus  $+x^2$  (ergibt  $2x^2$ ). Dann holen wir die  $-13x$  runter.

Als nächstes müssen wir die  $2x^2$  in der dritten Zeile durch das  $x$  im Linearfaktor teilen und erhalten  $+2x$ , die wir hinter das  $x^2$  schreiben. Wie kommen wir hier zu der  $2x$ ? Benutzen wir wieder einen Bruch:  $\frac{2x^2}{x} = 2x$ . Jetzt müssen wir  $+2x$  mit dem Linearfaktor multiplizieren und das Ergebnis in die vierte Zeile schreiben. Klammer drum rum, Strich drunter und ein Minus davor. Jetzt rechnen wir  $2x^2$  minus  $2x^2$  (fällt weg) und  $-13x$  minus  $+2x$  (ergibt  $-15x$ ). Dann holen wir die  $-15$  runter.

Als nächstes müssen wir die  $-15x$  in der fünften Zeile durch das  $x$  im Linearfaktor teilen und erhalten  $-15$  (notfalls mit Bruch zu erklären), die wir hinter  $+2x$  schreiben. Jetzt müssen wir  $-15$  mit dem Linearfaktor multiplizieren und das Ergebnis in die sechste Zeile schreiben. Klammer drum rum, Strich drunter und ein Minus davor. Jetzt rechnen wir  $-15x$  minus  $-15x$  (fällt weg) und  $-15$  minus  $-15$  (fällt auch weg). Somit erhalten wir ganz unten die Null, die uns anzeigt, dass die Polynomdivision ohne Rest aufgegangen ist.