8.5. Unbestimmtes und bestimmtes Integral

Den Unterschied zwischen unbestimmten und bestimmten Integral solltest du auf jeden Fall kennen. Du solltest wissen, woran man es erkennt, wie man es behandelt und was die Besonderheiten sind:

Beim Unbestimmten Integral geht es nur darum, eine Stammfunktion zu finden, also zu integrieren. Ein Unbestimmtes Integral erkennt man daran, dass an der Integralschlange keine Integralsgrenzen dabei stehen, wie dies beim bestimmten Integral der Fall ist. Besonderheit beim Unbestimmten Integral ist die Integrationskonstante c.

Das Unbestimmte Integral: $F(x) = \int f(x)\,dx = F(x) + c$

Was damit gemeint ist, sehen wir an folgendem Beispiel:

Bilde bitte von f(x) = x² das unbestimmte Integral d.h. suche die Stammfunktion

$$f(x) = x^2 \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = \int f(x)\,dx = \int x^2\,dx = \tfrac{1}{3}x^3 + c$$

Da es ein unbestimmtes Integral ist, stehen an der Integralschlange keine Integralsgrenzen. Nach Anwendung einer Integralregel erhalten wir die Stammfunktion, an die wir beim unbestimmten Integral immer die Integrationskonstante c anhängen müssen. Diese hat folgende Bedeutung: Zu einer gegebenen Funktion f(x) entstehen beim Integrieren nicht nur eine Stammfunktion, sondern unendlich viele Stammfunktionen. Das deutet man an, indem man die Integrationskonstante c anhängt, für die wir jede Zahl einsetzen können. Nochmals: Eine Funktion f(x) hat unendlich viele Stammfunktionen F(x). Wenn du die Ableitungsregeln noch drauf hast, kann ich dir das sofort zeigen. Wenn wir F(x) ableiten, dann muss ja f(x) rauskommen, denn ableiten ist ja das Gegenteil von integrieren. Leite doch mal die folgenden Funktionen ab:

$$F(x) = \tfrac{1}{3}x^3 \qquad und \qquad F(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + 5 \qquad und \qquad F(x) = \tfrac{1}{3}x^3 + c$$

Sie stellst fest, dass immer wieder f(x) = x² herauskommt. Du siehst, dass eine Funktion unendlich viele Stammfunktionen hat, was man wie gesagt mit der Integrationskonstante c andeutet. Wichtige Anmerkung: Eine Funktion f(x) hat zwar unendlich viele Stammfunktionen F(x), aber es existiert nur eine einzige Ableitung $f'(x)$.

Das bestimmte Integral wird auf der folgenden Seite erklärt.

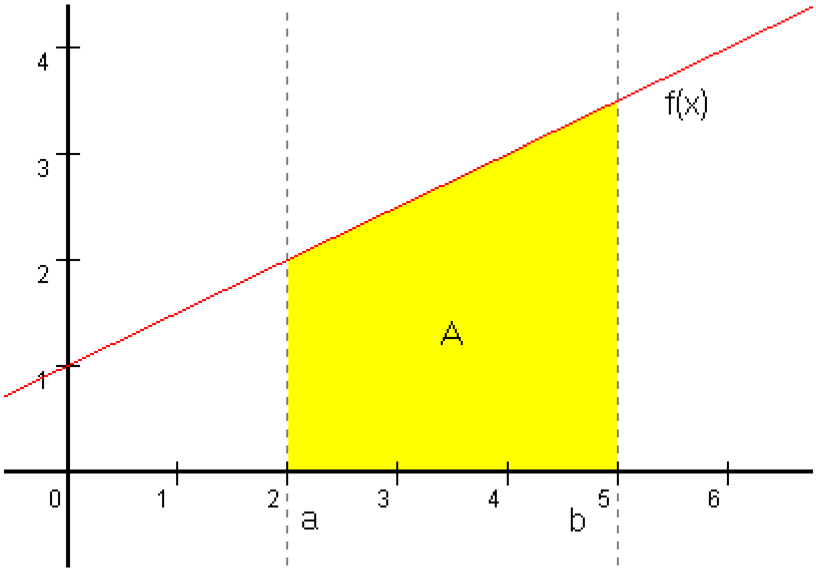
Beim Bestimmten Integral geht es um Flächenberechnungen, nämlich um die Fläche A zwischen der Funktion f(x) und der x-Achse in einem bestimmten Intervall [a ; b]. Diese

Intervallsgrenzen werden beim bestimmten Intervall an die Integralschlange geschrieben, woran man das bestimmte Integral dann auch immer leicht erkennen kann. Beim bestimmten Integral sollte man sich auch den Spruch: „Obergrenze minus Untergrenze“ merken. Damit ist gemeint, dass man nach dem Integrieren in die Stammfunktion zuerst die Obergrenze b einsetzt, also F(b) bildet, und davon F(a) abzieht, wobei F(a) die in die Stammfunktion eingesetzte Untergrenze a bedeutet. Achte hier bitte ganz besonders auf die Schreibweise. Nach dem Integrieren wird die Stammfunktion nämlich in eckige Klammern gesetzt, um anzudeuten, dass es ein bestimmtes Integral ist, bei dem man ja noch Obergrenze (in die Stammfunktion eingesetzt) minus (Untergrenze in die Stammfunktion eingesetzt) rechnen muss.

Das bestimmte Integral: $A = \int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Die Aussage A = F(b) – F(a) kannst du besser verstehen, wenn ich dir sage, was überhaupt berechnet wird, wenn man einen Wert in die Stammfunktion einsetzt. F(a) heißt ja nur, dass man den Wert von a in die Stammfunktion einsetzen soll. Aber wie kann man das Ergebnis interpretieren? Wenn der Wert a in die Stammfunktion eingesetzt wird, erhält man die Fläche zwischen der Funktion f(x) und der x-Achse in dem Intervall von 0 bis a. Setzt man den Wert b in die Stammfunktion ein, so erhält man die Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse in dem Intervall von 0 bis b. Also ist doch dann die in der folgenden Skizze abgebildete Fläche A die Differenz von F(b) und F(a).

:



Damit du das alles besser verstehst, ein Beispiel: Auch hier geht es hauptsächlich um die Schreibweise. Flächenberechnungen mit Hilfe des bestimmten Integrals werden noch ausführlich erklärt.

Bestimme die Fläche zwischen der Funktion f(x) = x² und der x-Achse in dem Intervall von 0 bis 3, also das bestimmte Integral von f(x) = x² im Intervall [0;3]

$$A = \int_0^3 x^2\,dx = [\tfrac{1}{3}x^3]_0^3 = \tfrac{1}{3}\cdot 3^2 - \tfrac{1}{3}\cdot 0^2 = \tfrac{1}{3}\cdot 9 - 0 = \tfrac{9}{3} = 3$$